

2023年2月9日

令和5年度
北海道大学大学院理学院自然史科学専攻
(地球惑星ダイナミクス講座, 地球惑星システム科学講座,
および 地震学火山学講座)
博士前期(修士)課程入学試験

専門科目試験問題
試験時間 9:00 ~ 12:00

以下の注意事項をよく読むこと。

1. 問題冊子1冊(この冊子), 解答用紙7枚, 草案紙2枚を配布する。
2. 専門科目試験の問題は, I 数学, II 物理学, III 化学, IV 地球科学I (地球史・テクトニクス・堆積学), および V 地球科学II (岩石学・鉱物学・火山学) の5分野から出題される。なお, 今回, II 物理学, および III 化学の出題はない。このうち, 出願時に申請した2分野を必ず選択して解答せよ。
3. 各分野の出題は, 例えば II-1, II-2 のように, いくつかの問題からなる。解答の方法については, 各分野の問題に与えられている指示をよく読むこと。
4. 解答は, II-1, II-2 などの問題ごとに別々の解答用紙(1枚)を用い, 指定された欄に, 数学などの科目名, II-1 のように問題番号, そして受験番号を記入すること。氏名は記入しないこと。ただし, IV-3 については図が印刷されている解答用紙を用いること。
5. 解答は解答用紙の裏面に及んでもよい。
6. 解答用紙, 草案紙が足りないときは, 試験監督者に申し出ること。
7. 解答用紙は選択した分野ごとに回収する。回収する解答用紙の枚数は, 分野毎に3枚ずつである。解答の如何に関わらず受験番号を記入し, これらの枚数の解答用紙を必ず提出すること。なお, 3分野以上にわたって提出しないこと。
8. 問題冊子と草案紙は持ち帰ってもよい。
9. 試験時間が終了し, 監督員の指示があるまで退出することはできない。試験時間中, トイレや体調不良がある受験生は挙手の上, 監督員に知らせること。

I 数学

以下の3問 (I-1, I-2, I-3) にすべて解答せよ. 解答にあたっては, 結果だけでなく導出過程も記せ.

I-1 (必須)

以下の問題に解答せよ. ただし, \mathbf{I} は単位行列とする.

問題1 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ について, 固有値とそれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは1とせよ.

問題2 行列 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

問1 ベクトル $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ は行列 \mathbf{B} の大きさ1の固有ベクトルである. それぞれの固有値, および実数 a と b を求めよ.

問2 3次の対角行列 \mathbf{Q} は $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ と表される. このとき, 行列 \mathbf{P} と \mathbf{Q} を求めよ.

問題3 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする. $\mathbf{C}^5 = m\mathbf{C} + n\mathbf{I}$ と表すとき, 整数 m と n を求めよ.

問題4 3次の正方行列 \mathbf{D} が $\mathbf{D}^3 = \mathbf{I}$ かつ $\mathbf{D} \neq k\mathbf{I}$ であるとき, \mathbf{D} を求めよ. ただし, k は任意の定数とする.

問題5 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 行列 \mathbf{E} の固有値をすべて求めよ.

I - 2 (必須)

以下の問題に解答せよ.

問題 1 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ であるとき, 以下の問いに答えよ.

問 1 $\frac{\partial r}{\partial x}$ と $\frac{\partial r}{\partial y}$ をそれぞれ θ を用いて表せ.

問 2 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log r$ を求めよ. ただし, $r \neq 0$ とする.

問題 2 2次元極座標系における実関数 $f(r, \theta)$ に関する方程式

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \right] f(r, \theta) = 0$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, k は実数である. また, r にのみ依存する関数 R と, θ にのみ依存する関数 Ψ を用いて

$$f(r, \theta) = R(r)\Psi(\theta)$$

と表されるものとする.

問 1 $\frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} + C\Psi = 0$ となることを示せ. ただし, C は定数とする.

問 2 $\Psi(\theta)$ の一般解を求めよ. さらに境界条件 $\Psi(\theta) = \Psi(\theta + 2\pi)$ を用いて, 問 1 の C は非負の整数であることを示せ.

問 3 $x = kr$ として, $x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2)R = 0$ を示せ. ただし, m は整数とする.

I - 3 (必須)

複素数 z について、以下の問題に解答せよ。

問題1 以下の問いに答えよ。ただし、 $z = x + iy$ (x, y は実数) とする。

問1 複素関数 e^{iz} の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ を求めよ。

問2 $u(x, y)$, $v(x, y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式を満たすことを示せ。

問題2 以下の問いに答えよ。

問1 次の関数の極をすべて求め、それらの極での留数を求めよ。

$$\frac{1}{z^3 + 3z}$$

問2 次の積分を求めよ。積分経路は、半径1の円を反時計回りに一周するとする。

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3 + 3z} dz$$

問題3 次の積分を求めよ。ただし、 $z = e^{i\theta}$ とおき、 $|z| = 1$ の円周上での積分に変換するとよい。

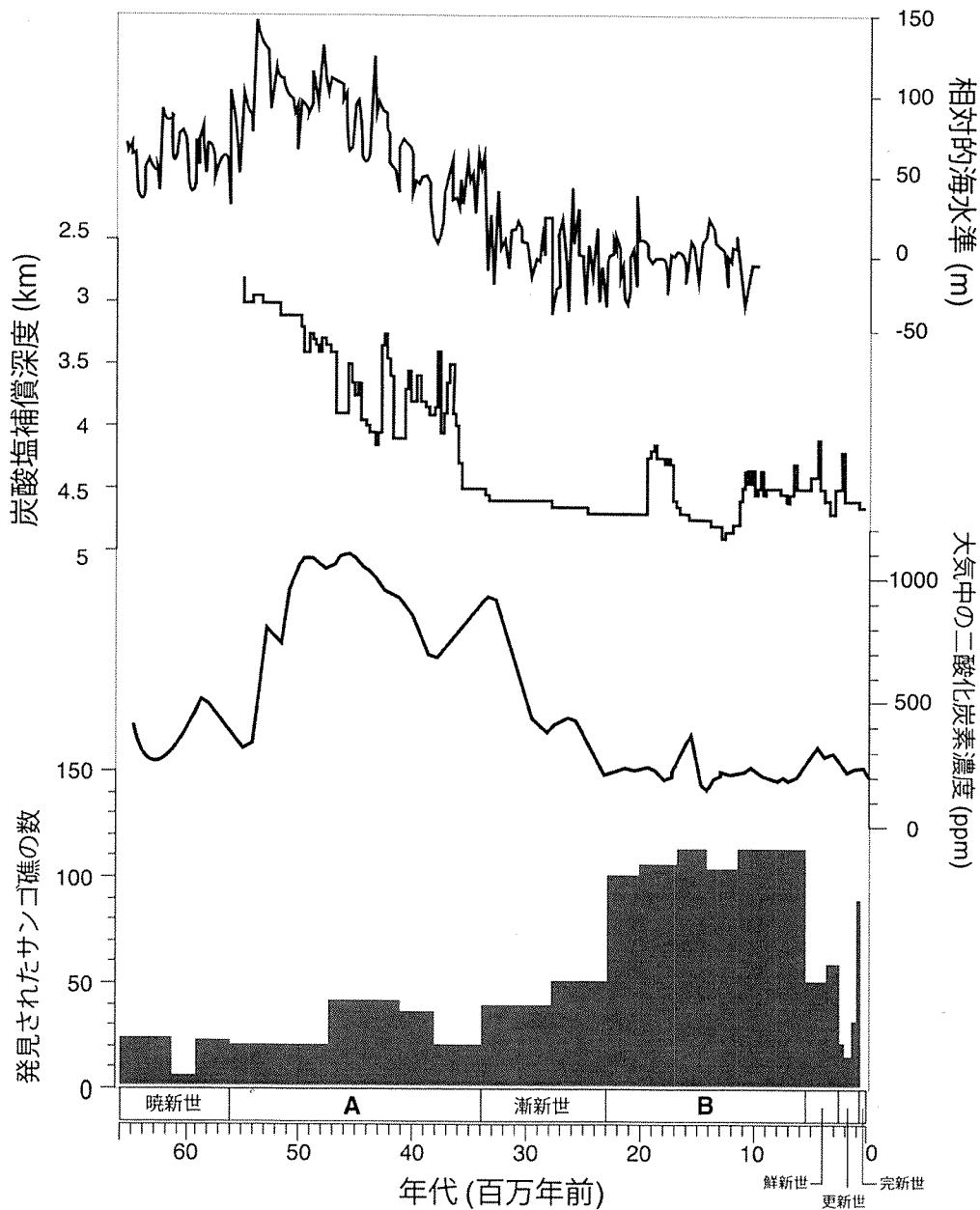
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}$$

IV 地球科学 I

以下の3問 (IV-1, IV-2, IV-3) すべてに解答せよ。

IV-1 (必須) 以下の文章を読み, 問題に解答せよ。

下の図は新生代における相対的海水準, 炭酸塩補償深度, 大気中の二酸化炭素濃度, および発見されたサンゴ礁の数を示したものである。

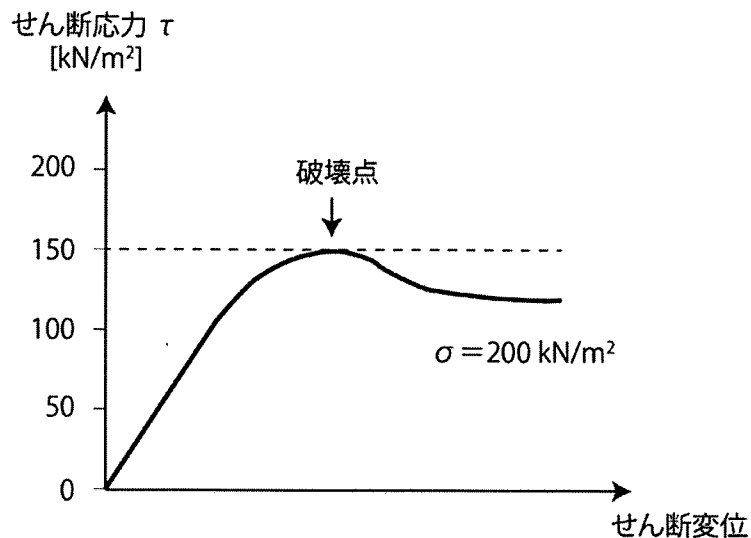


(Miller et al., 1998, Reviews of Geophysics, Pälike et al., 2012, Nature, Beerling and Royer, 2011, Nature Geoscience より抜粋・改変)

- 問題 1 図中の A と B の時代をそれぞれ世で答えよ.
- 問題 2 炭酸塩補償深度の定義とその条件を述べよ.
- 問題 3 図から相対的海水準が高い時には, 炭酸塩補償深度が浅い傾向がある. 考えられる理由を 100 字程度で述べよ.
- 問題 4 図から大気中の二酸化炭素濃度が高い時には, 相対的海水準が高い傾向があるように見える. 考えられる理由を 100 字程度で述べよ.
- 問題 5 海洋生物の化石を使って当時の環境を特定することができる場合がある. そのような化石のことを何とよいか答えよ. また, そのような化石に必要な特徴を 20 字程度で答えよ.
- 問題 6 図から, 発見されたサンゴ礁の数が B の時代に向かって段階的に多くなっている. その理由をサンゴ礁の形成条件と図から考えられる要因から 150 字程度で述べよ.

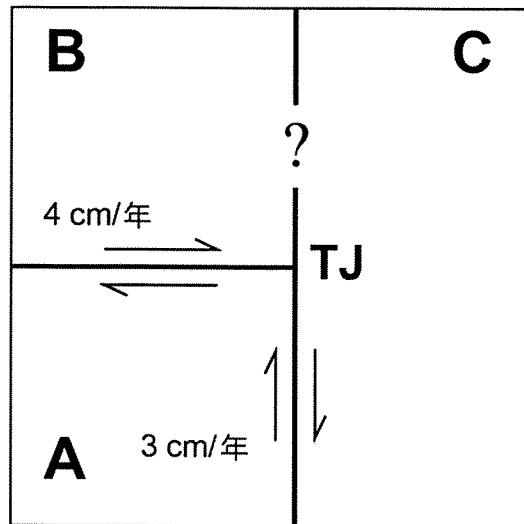
IV-2 (必須) 以下の問題に解答せよ。

問題1 下の図は、ある自然斜面から土試料を採取し、一面せん断試験を行った結果を示している。以下の問いに答えよ。



- 問1 実験を開始してから破壊するまでに試料はどのように変形したか、せん断変位とせん断応力の関係から考えられる変形の名称を用いて説明せよ。
- 問2 図に示すように、垂直応力 200 kN/m^2 の条件におけるせん断強さは 150 kN/m^2 であった。同様の実験を、垂直応力を変化させて複数回行ったところ、垂直応力とせん断強さの間にはきれいな直線関係が認められた。このような直線をなんと呼ぶか答えよ。
- 問3 問2で述べた複数回の実験により、この試料の内部摩擦角（あるいはせん断抵抗角）は 30° であることが分かった。試料の粘着力を有効数字2桁で答えよ。
- 問4 この斜面内部のすべり面においては、土の自重によるせん断応力が実験から見積もられるせん断強さよりも小さいため、斜面は安定であると判定された。仮にこの斜面が崩壊する場合、その要因としてどのような現象が想定されるか、例を一つ挙げて20字程度で説明せよ。

問題2 下の図は、海洋プレートA, Bと大陸プレート Cが交わる 3重会合点(TJ) 周囲のプレート境界の様子を示している。プレートA-BおよびA-C境界は東西走向と南北走向の横ずれ境界であり、プレート間の相対速度はそれぞれ4 cm/年と3 cm/年である。ここでは、3つのプレートは平面上を運動しているものとする。以下の問いに答えよ。



- 問1 南北走向のプレートB-C境界はどのようなプレート境界と考えられるか、理由とともに簡潔に述べよ。
- 問2 プレートB-C間の相対速度の大きさを答えよ。
- 問3 プレートAから見た三重会合点の相対速度の大きさを答えよ。

IV-3 (必須) 以下の文章を読み、問題に解答せよ。

図1は地球表層の200 kmより浅部の模式的な断面と、その領域における熱流量の一部を示している。

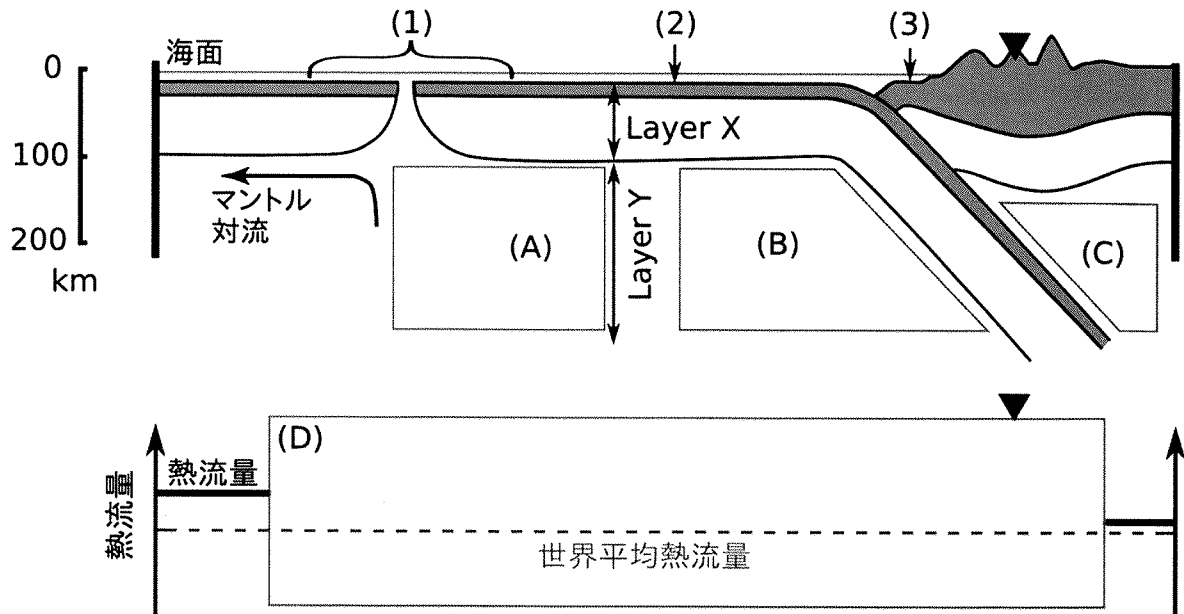


図1 地球表層の200 kmより浅い領域の断面図。▼は火山フロントの位置を示す。

- 問題1 図1の断面図に示されている Layer X と Layer Y の名称をそれぞれ答えよ。
- 問題2 図1の断面図にはマンテル対流の様子の一部が示されている。これにならぬ、(A)、(B)、(C)で示される領域のマンテル対流の様子を、解答用紙の図内に矢印で示せ。
- 問題3 図1の(2)および(3)の海底に見られる堆積物はそれぞれどのような特徴を持つか、100字程度で述べよ。
- 問題4 図1の(D)の領域における熱流量はどのように変化するか、解答用紙の図内に示せ。
- 問題5 図2は、図1の(1)の領域を拡大したものである。図2のような海底の磁化の縞模様の形成過程を100字程度で説明せよ。

■ 正磁気極性
□ 逆磁気極性

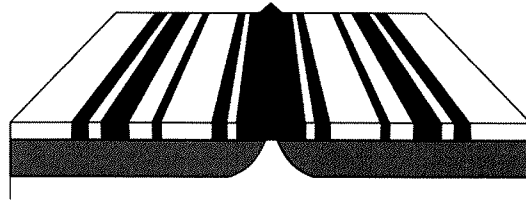


図 2 (1)で形成される縞模様構造

V 地球科学 II

以下の3問 (V-1, V-2, V-3) すべてに解答せよ。

V-1 (必須) 以下の文章を読み、問題に解答せよ。

マグマ溜まりの中では鉱物が生成し、徐々に成長してゆく。鉱物の密度は周囲のケイ酸塩メルトの密度とは一般に異なるため、沈降や浮上することで移動し、マグマから除去される。このことにより、残されたマグマの化学組成は変化する。例えば、玄武岩質マグマの中で^(a)苦鉄質成分に富むケイ酸塩鉱物が生成すると、その密度は周囲のメルトの密度よりも高いため^(b)沈んでゆく。その際、マグマ中の(ア)元素はメルトよりも鉱物に濃集しやすいため、残されたメルトはその元素に枯渇する。逆に、(イ)元素は鉱物に取り込まれにくいため、メルトに取り残される。このように、^(c)生成した鉱物が連続的に除去されながら、メルトの組成が変化してゆく過程を(ウ)結晶作用と呼ぶ。沈んだ鉱物はマグマ溜まりの底部に堆積し、^(d)(エ)と呼ばれる岩石を形成する。

問題1 空欄(ア)、(イ)に当てはまる語句の組み合わせとして正しいものを①~④から1つ選び、答えよ。

- | | | |
|----|--------|--------|
| ①: | ア-不適合 | イ-適合 |
| ②: | ア-適合 | イ-不適合 |
| ③: | ア-液相濃集 | イ-気相濃集 |
| ④: | ア-気相濃集 | イ-固相濃集 |

問題2 空欄(ウ)、(エ)に当てはまる語句として最も適切なものを以下から1つずつ選び、答えよ。

平衡 分別 融け残り岩 エクロジャイト 火砕岩 集積岩
マイロナイト カタクレースイト ハイアロクラスタイト

問題3 下線部(a)のうち、偏光顕微鏡下で次のすべての特徴を有する鉱物の名称および化学式を答えよ。

- ・自形の粒子は短柱状であり、丸みを帯びている
- ・へき開の発達は弱い。不規則なひび、割れ目が目立つ
- ・開放ニコルでは他の鉱物よりも浮かび上がっているように見える
- ・「さめ肌状」の様子が顕著に観察される
- ・直交ニコルでは鮮やかな干渉色が観察される

問題4 下線部(b)について、以下の問いに答えよ。ただし、鉱物の沈降は対流のない静かな環境で起こるものとする。

問1 鉱物の形を球と仮定する。このとき、鉱物の沈降速度 v は式(1)で与えられる：

$$v = \frac{2}{9} \frac{g \Delta \rho r^2}{\eta} \quad (1)$$

ここで g は重力加速度、 $\Delta \rho$ は鉱物と周囲メルトの密度差の絶対値、 r は球の半径、 η はメルトの粘性である。 $\Delta \rho$ と η は一定値とする。

鉱物は沈降する最中にも成長を続ける。鉱物の成長速度を一定とすると、鉱物の半径 r は

$$r = \alpha t \quad (2)$$

と表される。ただし α は鉱物の成長速度、 t は時間である。このとき、鉱物が生成してから時間 t の間に沈む距離 d は

$$d = \frac{2}{27} \frac{g \Delta \rho \alpha^2 t^3}{\eta} \quad (3)$$

と表されることを示せ。

問 2 この鉱物がメルトの中を 100 m 沈降するのにかかる時間 [年] を以下の定数を用いて計算し、有効数字 1 桁で答えよ。計算過程も示すこと。

- ・メルトの粘性係数 η : $1.0 \times 10^2 \text{ Pa s}$
- ・鉱物とメルトの密度差の絶対値 $\Delta\rho$: $9.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- ・鉱物の成長速度 a : $1.0 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-1}$
- ・重力加速度 g : 10 m s^{-2}
- ・1 年間の秒数 : $3 \times 10^7 \text{ s yr}^{-1}$

問題 5 下線部(c)について、メルト中の (ア) 元素の濃度がどのように変化するかを考える。以下の問いに答えよ。

問 1 図 1 は、(ウ) 結晶作用のボックスモデルを表したものである。ここでは、マグマ中で 1 種類の鉱物が生成し、ただちにその場から除去されるものとする。ある時点においてマグマからは既に質量分率 F の鉱物が生成し除去されており、メルトの質量分率は $1-F$ となっていた。このメルト中のある元素 (元素 i とする) の濃度を C_m とする。このメルトからさらに微量量 dF の鉱物 (元素 i の濃度は C_s) が生成し除去されると、メルト中の元素 i の濃度は $C_m + dC_m$ に変化する。このとき、元素 i の質量保存をもとに、

$$-(1-F)dC_m = (C_s - C_m)dF \quad (4)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $dF \times dC_m = 0$ とする。

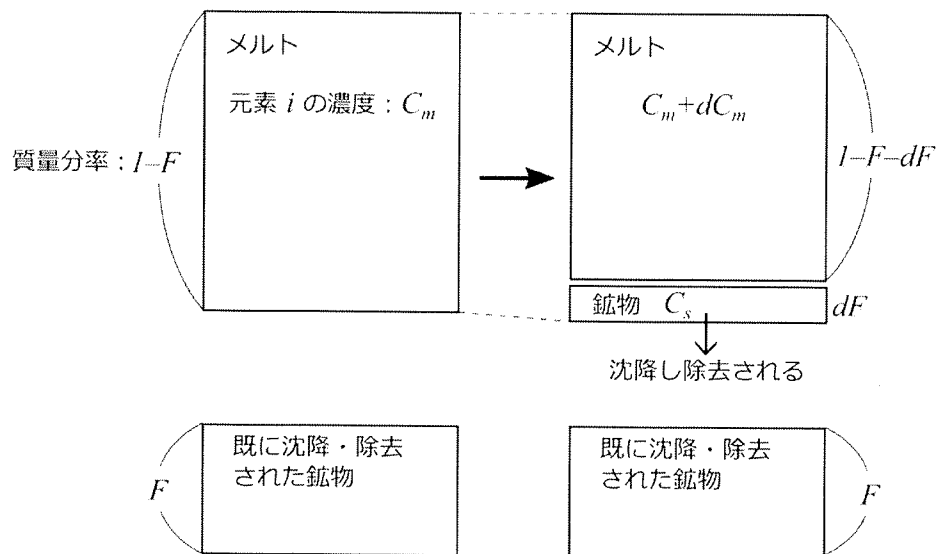


図 1 (ウ) 結晶作用のボックスモデル

問2 鋳物生成前 ($F=0$) のメルト中の元素 i の濃度は C_m^0 であった。このメルトから質量分率 F の鋳物が生成し除去されたとき、残っているメルトの元素 i の濃度 C_m は

$$C_m = C_m^0 (1 - F)^{(k-1)} \quad (5)$$

と表されることを示せ。ここで、 k は生成した鋳物とメルトの間の元素 i の分配係数であり、

$$k = \frac{C_s}{C_m} \quad (6)$$

で与えられる。ただし、 k は一定とする。

問3 元素 i の分配係数の値を $k=3$ とする。メルトの質量の半分が結晶化して除去されたとき、残ったメルトの元素 i の濃度は初期濃度の何倍になるか、有効数字2桁で答えよ。計算過程も示すこと。

問題6 下線部(d)について、図2は（エ）の薄片を光学顕微鏡で観察し描いたスケッチである。この岩石には2種類の鉱物AとBが含まれていた。鉱物A、Bのうち、一方は沈降してきた鉱物、もう一方は（エ）の内部であとから生成した鉱物と考えられている。鉱物AとBのうち、どちらが沈降してきた鉱物か。理由とともに30字程度で説明せよ。

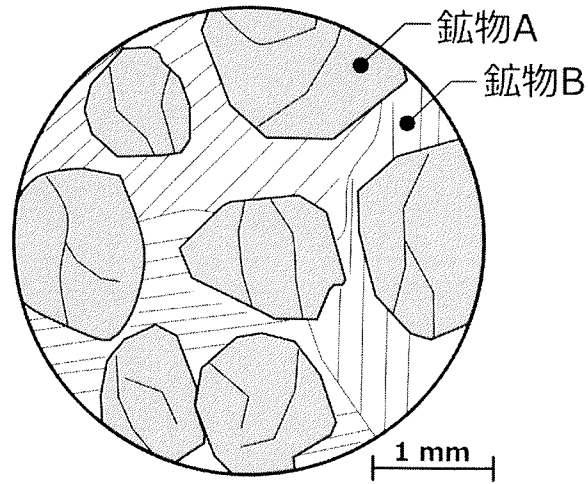


図2 （エ）のスケッチ

問題7 （ウ）結晶作用は、たとえ生成した鉱物がある場にとどまっても進行することがある。それはどのような場合か、80字程度で説明せよ。

V-2 (必須) グラファイトとダイヤモンドはともに炭素(C)からなる鉱物である。以下の問題に解答せよ。

問題1 以下の文章は、グラファイトとダイヤモンドの化学結合の特徴について述べたものである。(①) ~ (⑤) に入る適切な語句を、それぞれ語群から選んで答えよ。

グラファイトは、炭素原子の4つの電子のうち3つで平面状の(①) 混成軌道をつくるため、(②) 角形状の炭素原子が平面状に広がり、さらにそれが積層している。余った電子は層内で移動可能な(③) 結合を形成するため、グラファイトは電気伝導性を示す。一方でダイヤモンドは(④) 混成軌道によって共有結合し、その結合の方向は正(⑤) 面体の頂点方向を向いている。三次元の強固な共有結合であるため、ダイヤモンドは非常に硬い。

【語群】 σ , π , sp^3 , sp^2 , sp , 四, 五, 六, 八

問題2 以下のダイヤモンドについて述べた文として、最も適切なものを1つ選んで記号で答えよ。

- (あ) ダイヤモンドのモース硬度は、圧子を対象試料に押し込んで鉱物表面についた圧痕の大きさから求められる。
- (い) ダイヤモンドにはへき開がないため、特定の結晶面で割ることができない。
- (う) 天然のダイヤモンドの多くが{111}面で囲まれた正八面体の外形を示す。
- (え) リングウッドサイトを包有物として含むダイヤモンドは、地球内部の深さ300 kmより浅い条件で生成したと考えられる。

問題 3 図はグラファイトとダイヤモンドの相図であり, 点 m は 1000°C における相境界線上にある. 以下の問いに答えよ.

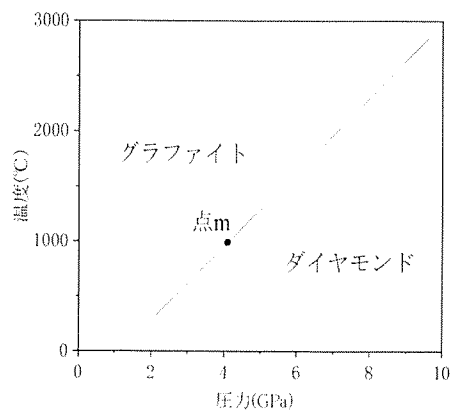


図 グラファイトと
ダイヤモンドの相図

問 1 グラファイトとダイヤモンドのギブスの自由エネルギーをそれぞれ G_g と G_d とする. グラファイトとダイヤモンドが共存する平衡状態での G_g と G_d の大小関係を答えよ.

問 2 1000°C における G_g と G_d の圧力変化曲線の概略を, 縦軸をギブスの自由エネルギー(G), 横軸を圧力(P)として同一の図中に示せ. なお, 図中に点 m における圧力を P_m として示すこと.

問 3 地表の大気圧, 20°C の条件ではグラファイトが安定であることが相図から分かるが, 実際には地表でダイヤモンドは長時間存在している. その理由について 60 字程度で説明せよ.

問題 4 化学的平衡にある任意の系においてはギブスの相律が成り立つ. 以下の問いに答えよ.

問 1 ギブスの相律で規定される自由度(F), 成分の数(C), 相の数(P)を表す式を示せ. また, 炭素のみからなる 1 成分系でダイヤモンドとグラファイトが共存している時の自由度はいくつか答えよ.

問 2 一般的に 1 成分系の場合, 同時に存在しうる相の最大の数はいくつか答えよ.

V-3 (必須) 以下の文章を読み、問題に解答せよ。

造岩鉱物として岩石中によく見られる黒雲母や緑泥石は、(a)SiO₄四面体が平面状に結合する結晶構造をもつ鉱物として分類される。この分類に属する鉱物は、(b)SiやAlを含む四面体サイトとMgやFeなどを含む八面体サイトの組み合わせからなる層の積み重なり方や、層間に含まれるイオンの有無によってさらにグループ分けされる。図1はその例を模式的に示したものである。このような構造上の特徴から、層間にさまざまな原子を吸着したり、結晶構造中に(c)OHを保持して含水鉱物となるなど、地球科学的にも工業的にも重要な性質をもっている。

問題1 SiO₄四面体の結合様式に基づく分類では、下線部(a)のような構造をもつケイ酸塩鉱物を何というか、答えよ。

問題2 問題1の構造における、SiO₄四面体をつなぐ架橋酸素と非架橋酸素の数の比を答えよ。

問題3 下線部(b)について、層の積み重なり方の違いによって、その方向の周期性に違いが生じる。例えば、図1中のグループAでは約7Å、グループBでは約10Å、グループCでは約14Åとなるが、この違いは、X線回折実験を行うことにより判別できる。問題1のケイ酸塩鉱物に属する鉱物の粉末X線回折実験を行った結果、 $2\theta = 9^\circ$ の位置に回折ピークが出現した。この鉱物が属するグループとして最も可能性が高いのは、グループA、B、Cのうちのいずれか、その理由も含めて答えよ。ただし、用いたX線の波長を1.54Åとし、必要に応じて以下の値を用いよ。

$$\sin 9^\circ = 0.156, \sin 4.5^\circ = 0.0785, \cos 9^\circ = 0.988, \cos 4.5^\circ = 0.997$$

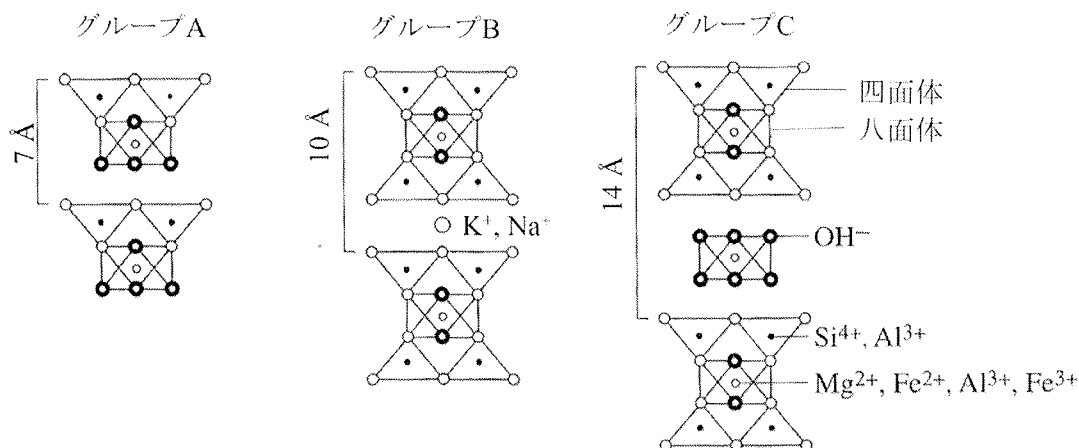


図1 問題のケイ酸塩鉱物に属する鉱物を、SiO₄四面体が形成する平面の広がり方向から見てグループ分けした模式図 (Wenk and Bulakh, 2004 を改変)

問題 4 問題 3 のような層の積み重なりの間隔は、直方晶系のような直交系では単位格子のいずれかの軸の長さに等しい。しかし、実際の黒雲母などの結晶構造は単斜晶系であり、 SiO_4 四面体で作られる平面を a - b 面としたときの c 軸は層の積み重なり方向からやや傾いている。この構造について、以下の問いに答えよ。

問1 図 2 は、単斜晶系の単位格子を b 軸方向から見た a - c 面の投影図である。 $\beta > 90^\circ$ にとるとき、 $\{001\}$ 面の面間隔 d_{001} を式で表せ。ただし、図中に示された格子定数 a, c, β のうち必要なものを使うこと。

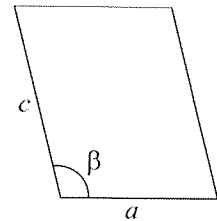


図 2 単斜晶系の単位格子を b 軸方向から見た投影図

問2 問 1 の場合において、X線回折パターンを測定したときの結晶面 $\{001\}$ による回折角 θ_0 と、格子定数の関係を式で表せ。ただし、用いた X 線の波長を λ とし、図中に示された格子定数 a, c, β のうち必要なものを使うこと。

問題 5 下線部(c)について、熱重量測定を行い、加熱して脱水反応が起きる前後の重量を測定することで、鉱物の含水量を知ることができる。滑石 $\text{Mg}_3\text{Si}_4\text{O}_{10}(\text{OH})_2 (= 3\text{MgO} \cdot 4\text{SiO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O})$ は、1200 K まで加熱すると H_2O 成分がすべて脱水するという報告がある。この温度まで加熱した時、脱水のみが重量変化に寄与すると仮定すると、何%の重量減少が起こるか、小数点以下 1 桁まで答えよ。ただし、 MgO 、 SiO_2 、 H_2O の分子量を、それぞれ 40、60、18 とする。

問題 6 以下は、黒雲母を偏光顕微鏡で観察したときの特徴である。このうち、開放ニコルによる観察では確認できない特徴を、全て選んで記号で答えよ。

- (あ) 板状や薄片状の形状を示すことが多い。
- (い) 顕著なへき開が認められる。
- (う) へき開に対してほとんど直消光する。
- (え) 強い多色性を示す。